Lezione5 c2

lunedì 16 marzo 2026 13:49

Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Limiti di Funzioni

(•) $\lim_{x \to +\infty} P(x) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n + \dots + a_0 = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

Teorema (Confronto limiti)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in DA$

Siano $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in A$$

① (Teorema dei Carabinieri)

$$\text{se } \left.\begin{array}{l} \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \\ \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

② Se $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

③ Se $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Limiti Notevoli

①

Siano $P(x) = a_n x^n + --- + a_0$

$Q(x) = b_m x^m + -- + b_0$

due polinomi di rispettivi gradi n, m -

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ F.i.}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + --- + a_0}{b_m x^m + -- - + b_0} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \cdot \frac{\left[1 + \overbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x}}^{\to 0} + --+ \overbrace{\frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n}}^{\to 0}\right]}{\left[1 + \underbrace{\frac{b_{m-1}}{b_m} \frac{1}{x}}_{\to 0} + \cdots + \underbrace{\frac{b_0}{b_m} \frac{1}{x^m}}_{\to 0}\right]}$$

$$= \begin{cases} \xrightarrow{(n>m)} & \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_n}{b_m}\, \overset{\to +\infty}{\boxed{x^{n-m}}} \cdot \frac{[\;—\;]}{[\;—\;]} \\ \xrightarrow{(n=m)} & \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{[\;—\;]}{[\;—\;]} \\ \xrightarrow{(n<m)} & \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \underset{\to 0}{\boxed{\frac{1}{x^{m-n}}}}\, \frac{[\;—\;]}{[\;—\;]} \end{cases}$$

Deduciamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} +\infty & \text{se } \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty & \text{se } \frac{a_n}{b_m} < 0 \end{array}\right\} & n > m \\ \frac{a_n}{b_n} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

② $$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a>1 \\ +\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

③ $$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ -\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a>1 \\ +\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

④ $$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$$ $a>1$ $\forall p \in \mathbb{R}$

⑤ $$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^b}{x^p} = 0$$ $a>1$

$\forall b, p \in \mathbb{R}$

⑥ $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ "Numero di Nepero"

$\boxed{2<e<3}$

(F.i. 1^{∞})

si può anche riscrivere come

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

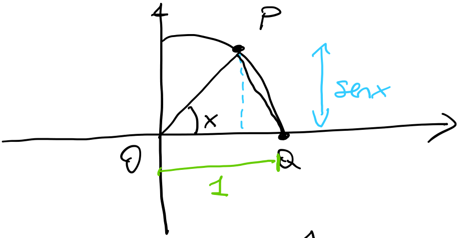
⑦ $\lim_{x\to0}\frac{a^{x}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\log a$

⑧ $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

⑨ $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=(\infty^{0}\text{ f.i.})=1$

⑩ $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$

Proviamolo:



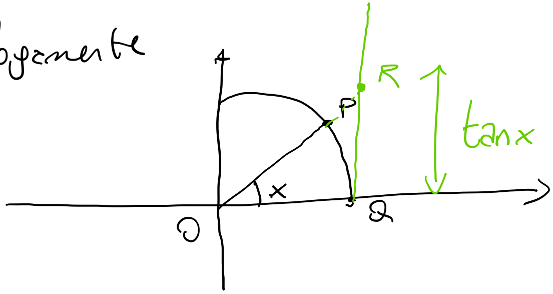
Notiamo che il triangolo $\overset{\triangle}{OPQ}$ è dentro la porzione di circonferenza delineata da $\overset{\frown}{OPQ}$

$$\Rightarrow \quad \text{area } \overset{\triangle}{OPQ} \leq \text{area } \overset{\frown}{OPQ}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} \leq \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{sen} x \leq x} \qquad (*)$$

Analogamente



Notiamo che la porzione di circonferenza $\overset{\frown}{OPQ}$ è contenuta nel triangolo $\overset{\triangle}{ORQ}$

$$\Rightarrow \quad \text{area } \overset{\frown}{OPQ} \leq \text{area } \overset{\triangle}{ORQ}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x \leq \tan x} \quad (**)$$

Conclusione

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

reciproci

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

moltiplico $\operatorname{sen} x$:

$$\boxed{\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1}$$

Ma

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} 1 = 1$$

Dal teorema Carabinieri

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Ripeto: $\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$$

⑪ $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

⑫ $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \left(\frac{0}{0} \text{ F.i}\right)$$

Proviamolo:

Formula Fondamentale di trigonometria

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

La utilizziamo nel modo: $\boxed{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x}$

Infatti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}\cdot\frac{(1+\cos x)}{1+\cos x} =$$

$$\boxed{\text{ma } (1-\cos x)(1+\cos x) = 1-\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1}\Big)^2\cdot\frac{1}{\underbrace{1+\cos x}_{1+1}} = 1\cdot\frac{1}{1+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

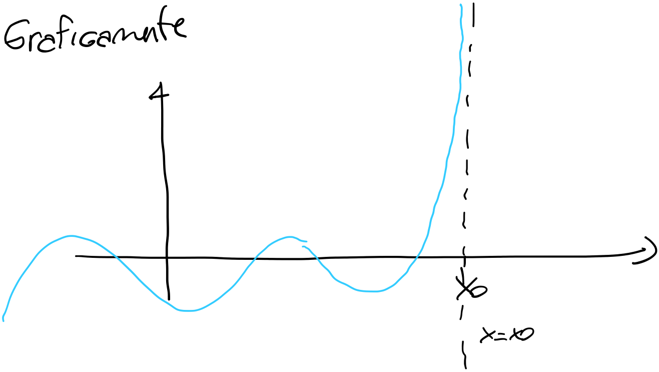
Asintoti per una Funzione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in DA$ $\quad f: A \longrightarrow \mathbb{R}$

① Diremo che la retta $\boxed{x = x_0}$ è Asintoto verticale per $F(x)$ se accade

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm \infty$$

Graficamente



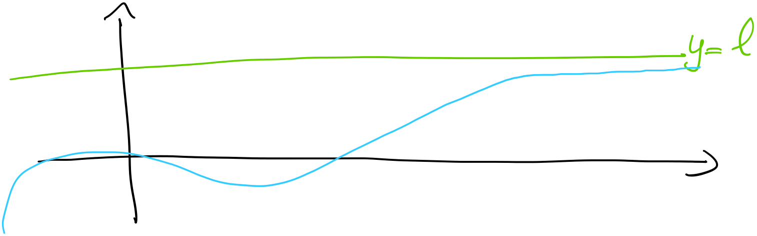
② Diremo che la retta $\boxed{y = \ell}$ è Asintoto Orizzontale per $f(x)$ se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$ (Asintoto Orizzontale Destro)

Oppure

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$ (Asintoto Orizzontale Sinistro)

Graficamente



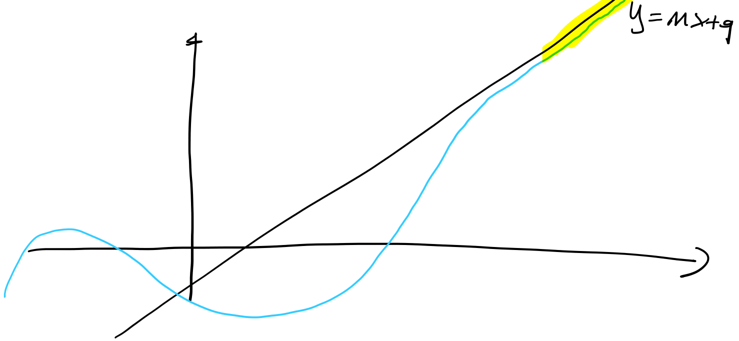
③ Diremo che la retta $\boxed{y = mx+q}$ si dice essere Asintoto Obliquo per $f(x)$ se accade

① $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$

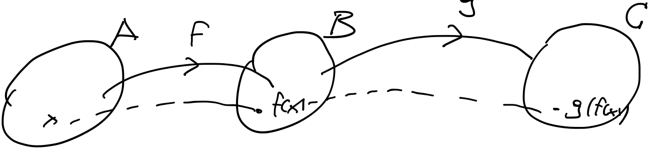
② $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \neq 0$

③ $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q$

Graficamente



Funzioni composte



Sia $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f: A \to B$ e

$g: B \to C$

Definiamo

$$g \circ f(x) \overset{def}{=} g(f(x)) \quad \forall x \in A$$

$g \circ f : A \to C$

Teorema (Limite funzioni composte)

Sia $f: A \to B$ e $g: B \to \mathbb{R}$

$x_0 \in DA$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = k$ con $k \in DB$

se $\lim_{y \to k} g(y) = l$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$$

Corollario (cambio di variabile)

Siano $f : A \to B$ e $g : B \to \mathbb{R}$

con f è invertibile (iniettiva + suriettiva)

se $x_0 \in DA$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = k$

$\lim_{y \to k} f^{-1}(y) = x_0$

Allora

$$\lim_{y \to k} g(y) = l \iff \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{e^{2x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{(e^x)^2+1}$$

Utilizzo cambio variabile $y=e^x$

Ma $\boxed{\lim_{x\to+\infty} y=+\infty}$ $(e>1)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{e^{2x}+1}\overset{cv}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{y+3}{y^2+1}=0$$

Limite Destro e Sinistro

Diremo che $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ (Limite Destro)

se accade

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in A$ con $\boxed{x\in]x_0,x_0+\delta[}$

$\Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

Diremo che $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ (Limite Sinistro)

se accade

$\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0 : \forall x\in A$ con $x\in \left]x_0-\delta, x_0\right[$

$$\Rightarrow \quad |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

Teorema

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell \\ \displaystyle\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell \end{array}$$

Tale teorema verrà utilizzato in forma negativa ossia

Se $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_1$

$$\ell_1 \neq \ell_2$$

$\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell_2$

$$\Rightarrow \quad \nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Diremo in tal caso che $f(x)$ "oscilla" verso x_0

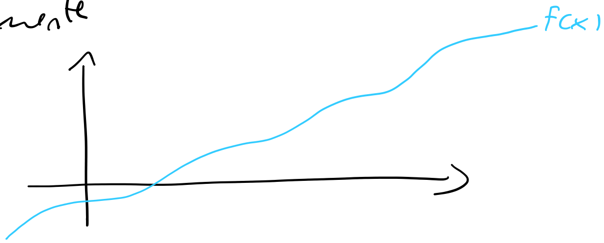
Def (Monotona)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$

① Diremo che $f(x)$ è monotona crescente se

$$x \le y \iff f(x) \le f(y)$$

Graficamente



② Diremo che $f(x)$ è monotona decrescente

se

$$x \le y \iff f(x) \ge f(y)$$

Teorema (Limiti Funzioni Monotone)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in DA$

① se $f(x)$ è monotona crescente

Allora

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x > x_0\}$$

② Se f(x) è monotona decrescente

Allora

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf\{f(x) : x < x_0\}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup\{f(x) : x > x_0\}$$

Esercizio

$$A = \left\{ \frac{n^2+1}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

Noto che gli elementi di A sono tutti numeri positivi

Cerco maggioranti $\boxed{x > 0}$

$$\frac{n^2+1}{n} \le x \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

$$n^2+1 \le x\cdot n$$

$$(P_n) \quad \boxed{n^2 - x\cdot n + 1 \le 0}$$

$$\Delta = x^2 - 4 \nearrow \quad \Delta > 0 \Rightarrow \text{sol} = \text{Intervallo}$$

$$\underbrace{\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2} \le n}_{\text{OK}} \underbrace{\le \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}}$$

$$n \le \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{N}^+$ dovrebbe esse limitato superiormente

$\not\Rightarrow$ non è possibile per Archimede

Ossia se $\Delta > 0 \Rightarrow x$ non può essere maggiorante

Nota $\Delta \le 0$ $\quad n^2 - xn + 1 \le 0$

$\Rightarrow \quad \text{Sol} = \emptyset$

$\emptyset$ non potrà essere mai $\mathbb{N}^+$

$\Longrightarrow$ Non ci sono maggioranti per A

$\Longrightarrow$ A non è limitato superiormente

$$\boxed{\sup A = +\infty}$$

Cerco Minoranti   Sappiamo già $0 \in A_*$

cerco minoranti $x>0$

$$x \le \frac{n^2+1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

$$x n \le n^2+1$$

$$(P_n) \quad \boxed{n^2 - xn + 1 \ge 0} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

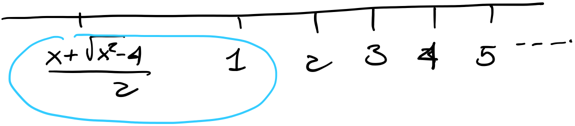
$$\Delta = x^2-4$$

Caso 1 $\Delta > 0$ Sol

$$n \le \cancel{\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}} \quad \cup \quad n \ge \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$$

Verifico 2°

$$n \geq \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} \quad \text{impongo} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$



$$\iff \quad \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} \leq 1$$

$$x+\sqrt{x^2-4} \leq 2$$

$$\boxed{\sqrt{x^2-4} \leq 2-x}$$

ricordo $\boxed{\Delta>0}$ $(x^2-4>0)$ ossia $\boxed{x>2}$

ma $\boxed{2-x<0}$

$\Rightarrow$ mai verificata!

ossia non può accadere $\boxed{\Delta>0}$

Riscrivo $n^2 - xn + 1 \geq 0$

studio $\boxed{\Delta \leq 0} \Longrightarrow \text{Sol} = \mathbb{N}^+$ $\boxed{\text{ok}}$

$$\Delta = x^2 - 4 \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 2$$

Conclusione: affinché $x > 0$ sia minorante per A deve accadere $x \leq 2$

$$\Longrightarrow \inf A = \max A_* = 2$$

$$2 = \min A \,? \iff 2 \in A \,?$$

$$\iff 2 = \frac{n^2+1}{n}$$

vera $\boxed{n=1}$

$$\Longrightarrow \boxed{2 = \min A}$$

Esercizio

$$A = \left\{ \frac{x}{x+1} \; : \; -2 \le x < -1 \right\}$$

Noto $\boxed{x<0}$ ma anche $x+1<0$ (poiché $x<-1$)

$\Rightarrow$ A consiste di elementi positivi

① Cerco maggioranti $\boxed{y>0}$

Sol

$$\boxed{\forall x \in [-2, -1[}$$

$$\frac{x}{x+1} \le y$$

$$x \ge (x+1)\, y$$

$$x \ge yx + y$$

$$x - yx \ge y$$

$$(1-y) \cdot x \ge y$$

$0 < y < 1$

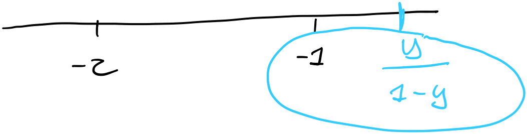
$$\boxed{x \geq \frac{y}{1-y}}$$

$y > 1$

$$\boxed{x \leq \frac{y}{1-y}}$$

In ambo i casi devo imporre che la sol. $\forall x \in [-2,-1[$

caso $y > 1$ $\qquad x \leq \frac{y}{1-y} \quad \forall x \in [-2,-1[$?



$$\iff \quad -1 \leq \frac{y}{1-y}$$

cambio segno : $\quad 1 \geq \frac{y}{y-1}$

molt. $y-1>0$: $\quad \cancel{y}-1 \geq \cancel{y}$

ossia $-1 \geq 0$ $\boxed{\text{Mai}}$

Conclusione nessun $y>1$ può essere maggiorante per A

In particolare nessun $0<y<1$ può altresì essere maggiorante (se ce ne fosse uno allora tutti $y>1$ dovrebbero esserlo)

$\Rightarrow$ A non ammette maggiorante

$\Rightarrow$ A non è limitato superiormente

$$\boxed{\sup A = +\infty}$$

Cerco minoranti $\boxed{y>0}$ (poiché $0 \in A_*$)

$$y \leq \frac{x}{x+1} \qquad \forall x \in [-2,-1[$$

$$y(x+1) \geq x$$

$$y \cdot x + y \geq x$$

$$y \geq -y \cdot x + x$$

$$y \geq (1-y) \cdot x$$

$\boxed{0<y<1}$

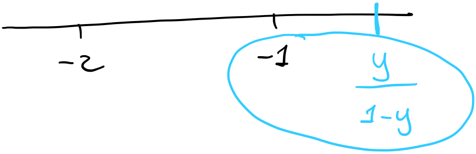
sol $\boxed{x \leq \frac{y}{1-y}}$

$\boxed{y>1}$

sol $\boxed{x \geq \frac{y}{1-y}}$

caso $\boxed{0<y<1}$

$x \leq \frac{y}{1-y}$ impongo $\forall x \in [-2,-1[$



$\iff \quad -1 \le \frac{y}{1-y} \qquad (0<y<1)$

$\iff$ molt. $\boxed{1-y>0}$ $\quad -1\cdot(1-y) \le y$

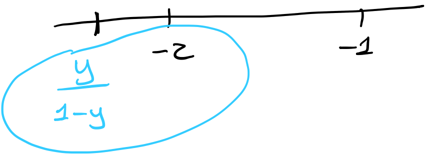
$-1+\cancel{y} \le \cancel{y}$

$-1 \le 0$ sempre

$\implies$ Ogni $0<y<1$ è minorante

caso $\boxed{y>1}$

Sol $\quad x \ge \frac{y}{1-y} \qquad$ Impongo $\forall x \in [-2,-1[$



$(y>1)$

$\iff \quad \frac{y}{1-y} \le -2$

molt. $(1-y<0)$ $$y \geq -2(1-y)$$

$$y \geq -2+2y$$

$$y-2y \geq -2$$

$$-y \geq -2$$

$$\boxed{y \leq 2}$$

Conclusione: Affinché $y>1$ sia minorante per A deve accadere $y \leq 2$

$$\Rightarrow \quad \inf A = \max A_* = 2$$

$2 \in A$? $\iff$ $2 = \dfrac{x}{1+x}$ per $x \in [-2,-1[$?

$$\iff 2(1+x) = x$$

$$\iff 2+2x = x$$

$$\iff 2 = -x$$

$$\iff x = -2$$ OK

$$\Rightarrow \quad \boxed{2 = \min A}$$ ■